Τετάρτη 17/04/2019

Πρόταση: Η υποομάδα H της G είναι κανονική αν-ν $gHg^{-1} = H$, για κάθε $g \in G$.

Απόδειξη:

$H \triangleleft G \overset{\text{ορισμός}}{\Longleftrightarrow} gH = Hg, \forall g \in G \Leftrightarrow gHg^{-1} = Hgg^{-1}, \forall g \in G \Leftrightarrow gHg^{-1} = H$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Η υποομάδα H της G είναι κανονική αν-ν $gHg^{-1} \subseteq H$

Απόδειξη:

$(\longrightarrow)$ $H \triangleleft G \Rightarrow gHg^{-1} = H \Rightarrow gHg^{-1} \subseteq H$

$(\longleftarrow)$ Έστω $gHg^{-1} \subseteq H$ ισχύει $\forall g \in G$ συνεπώς ισχύει και για το g^{-1}:

$g^{-1}Hg \subseteq H \Rightarrow gg^{-1}Hg \subseteq gH \Rightarrow gg^{-1}Hgg^{-1} \subseteq gHg^{-1} \Rightarrow H \subseteq gHg^{-1}$

Ορισμός: Το y λέγεται συζυγές του x αν υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε: $y = gxg^{-1}$, όπου $x, y \in G$.

Η σχέση y συζυγές x είναι σχέση ισοδυναμίας στην G. (Πρόταση)

Απόδειξη:

συμμετρική

• $x = exe^{-1} \Rightarrow x \sim_\sigma x$ ανακλαστική.

• $y \sim_\sigma x \Rightarrow \exists g \in G: \ y = gxg^{-1} \Rightarrow g^{-1}yg = g^{-1}gxg^{-1}g \Rightarrow x = g^{-1}y(g^{-1})^{-1} \Rightarrow x \sim_\sigma y$

• $\left.\begin{array}{l} y \sim_\sigma x \Leftrightarrow y = g_1 x g_1^{-1} \\ z \sim_\sigma y \Leftrightarrow z = g_2 y g_2^{-1} \end{array}\right\} z = g_2 y g_2^{-1} = g_2(g_1 x g_1^{-1})g_2^{-1} = g_2 g_1 x g_1^{-1} g_2^{-1} = (g_2 g_1)x(g_2 g_1)^{-1}$

μεταβατική.

Άρα $\sim_\sigma$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Πρόταση Έστω $H \trianglelefteq G$ και y συζυγές με το x. Αν $x \in H$ τότε και $y \in H$.

Απόδειξη

$y \sim_\sigma x \Rightarrow y = \underset{x \in H}{gxg^{-1}} \Rightarrow y \in gHg^{-1} = H \Rightarrow y \in H$

Άσκηση: Έστω G αβελιανή ομάδα και $x \in G$. Βρείτε την κλάση συζυγίας του x.

Έστω $y \sim_\sigma x \Rightarrow y = \underset{\text{για κάποιο } g \in G}{gxg^{-1}} \overset{G}{\underset{\text{αβελ.}}{=}} (xg)g^{-1} = xgg^{-1} = x \quad \left([x]_{\sim_\sigma} = [x]\right)$

Άσκηση: Στην ομάδα S_4 βρείτε την κλάση συζυγίας του $\sigma = (1,3,4)$.

Έστω τ συζυγές με το σ, δηλ., $\tau = g\sigma g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ g(1) & g(2) & g(3) & g(4) \end{pmatrix} (1,3,4) \begin{pmatrix} g(1) & g(2) & g(3) & g(4) \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

όλοι οι κύκλοι μήκους 3

$= (g(1), g(3), g(4))$ Άρα $[(1,3,4)]_{\sim_\sigma} = \left\{ \begin{array}{l} (1,2,3), (1,2,4), (1,3,2), (1,3,4), (1,4,2), \\ (1,4,3), (2,3,4), (2,4,3) \end{array} \right\}$

Βρείτε ένα g τέτοιο ώστε: $(1,2,3) = g(1,3,4)g^{-1} = (g(1), g(3), g(4))$

$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (2,4,3)$ αφού $\begin{cases} g(1) = 1 \\ g(3) = 2 \\ g(4) = 3 \end{cases}$

$((2,3,1))$ $\quad g' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ αφού $\begin{cases} g'(1) = 2 \\ g'(3) = 3 \\ g'(4) = 1 \end{cases}$

$\longrightarrow g(2,3,5,11)(1,4,7,10,9,6,8)g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ g(1) & g(2) & g(3) & g(4) & g(5) & g(6) & g(7) & g(8) & g(9) & g(10) & g(11) \end{pmatrix}$

$(2,3,5,11)(1,4,7,10,9,6,8) \begin{pmatrix} g(1) & g(2) & g(3) & g(4) & g(5) & g(6) & g(7) & g(8) & g(9) & g(10) & g(11) \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} =$

$= (g(2), g(3), g(5), g(11))\,(g(1), g(4), g(7), g(10), g(9), g(6), g(8))$.

Βρείτε όλες τις κανονικές υποομάδες της S_4.

S_4

- I ①
- $(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)$ ⑥
- $(1,2,3), (1,2,4), (1,3,2), (1,3,4), (1,4,2), (1,4,3), (2,3,4), (2,4,3)$ ⑧
- $(1,2,3,4), (1,2,4,3), (1,3,2,4), (1,3,4,2), (1,4,2,3), (1,4,3,2)$ ⑥
- $(1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)$ ③

Έστω $H \triangleleft S_4$ $\quad |H| \mid 24$ (Lagrange) $\quad |H| \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

η υπόλοιπες καμμία κανονική

$\{I\} \triangleleft S_4$

$\{I, (1,2)(3,4), (1,4)(2,3), (1,3)(2,4)\} = V_4$

$\{I, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3), (1,2,3) \dots (2,4,3)\} = A_4$ Αρτιες μεταθέσεις

Άρα οι κανονικές υποομάδες της S_4 είναι:
$\{I\}, V_4, A_4, S_4$.

$H \triangleleft G \qquad G/H = \{aH \mid a \in G\}$ ομάδα πηλίκο.

$|G/H| = (G:H)$ δείκτης της H στην G.

$aH \cdot bH = abH$ καλά ορισμένη

- $(aH\, bH)\gamma H = abH\gamma H = (ab)\gamma H$ προσεταιριστική.
  $aH(bH\,\gamma H) = aH(b\gamma H) = a(b\gamma)H$
- $(aH)(eH) = (ae)H = aH$ ουδέτερο στοιχείο το eH
- $(eH)(aH) = (ea)H = aH$
- $(aH)(a^{-1}H) = eH = (a^{-1}H)aH$ αντίστροφο.

Άρα G/H ομάδα.

<u>Παράδειγμα</u> $\quad H = \langle [2]_6, [0]_2 \rangle \qquad G = Z_6 \times Z_2$ → G-αβελιανή

$H = \{([0]_6, [0]_2), ([2]_6, [0]_2), ([4]_6, [0]_2)\}$

Η G είναι ευθύ γινόμενο αβελιανών ομάδων άρα είναι αβελιανή
$\Rightarrow$ κάθε υποομάδα της είναι κανονική. Άρα $H \triangleleft G$.

$G/H = (G:H) = |G|/|H| = 12/3 = 4$

$([2]_6, [0]_2) + H = ([4]_6, [0]_2) + H$

$= ([0]_6, [0]_2) + H = H = \{([0]_6, [0]_2), ([2]_6, [0]_2), ([4]_6, [0]_2)\}.$

$([1]_6, [0]_2) + H = \{([1]_6, [0]_2), ([3]_6, [0]_2), ([5]_6, [0]_2)\} = ([5]_6, [0]_2) + H$

$([0]_6, [1]_2) + H = \{([0]_6, [1]_2), ([2]_6, [1]_2), ([4]_6, [1]_2)\}.$

$([1]_6, [1]_2) + H = \{([1]_6, [1]_2), ([3]_6, [1]_2), ([5]_6, [1]_2)\}$